Ю. С. Асфандиярова

Южно-Уральский государственный университет,

asfandiyarova@list.ru

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В приложениях (например, в теории динамических измерений [1]) возникают проблемы, приводящие к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с неклассическими краевыми условиями — многоточечные краевые задачи, задачи с распределенными данными и т. п. С математической точки зрения все подобные задачи могут быть сформулированы как задачи решения линейного дифференциального уравнения с дополнительными условиями:

$$\begin{cases} L[x] = x^{(n)} + p_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + p_1 x' + p_0 x = f(t), \\ U_j(x) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $p_i(t)$, $f(t)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции, α_j — числа, $U_j(x)$ — линейные, линейно-независимые функционалы, представимые в общем случае в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i x^{i-1)}(t_j) + \int_a^b g_k(t)x(t)dt = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Наряду с *прямой задачей* — нахождением неизвестной функции $x(t)$ по заданной $f(t)$ — часто возникает и задача нахождения правой части $f(t)$ по экспериментально измеренной функции $x(t)$.

В настоящей работе предлагается параллельный алгоритм решения обратной задачи обращением дифференциального оператора с помощью функции Грина. В основу метода положено хорошо известное соотношение для решения дифференциального уравнения:

$$x(t) = \int\limits_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (2)$$

где $G(t,\tau)$ — функция Грина задачи (1). Это соотношение, являющееся обращением дифференциального оператора (1), позволяет по измеренному экспериментально решению найти правую часть уравнения (1). Эффективные и устойчивые методы решения подобных задач хорошо известны (например, [2], [3]).

Функция Грина основной задачи (1) может быть найдена с помощью функции Грина вспомогательной задачи ([4], [5]):

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t), \\ U_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \qquad (3)$$

На основании описанной теории, анализа существующих методов и современных тенденций развития компьютерной техники, в связи с широким внедрением многопроцессорных компьютеров и появлением высокопроизводительных многопроцессорных кластеров был предложен следующий алгоритм решения обратной задачи теории динамических измерений, реализующий ресурс параллелизма данной задачи.

Входные данные: $x(t)$ — измеренный сигнал, $p_i(t)$ — коэффициенты дифференциального уравнения, $U_j(x)$ — граничные условия.

1. Вычисляем функцию Грина вспомогательной задачи (3). Вычисление функции Грина происходит в два этапа.

1.1. Вычисление промежуточных коэффициентов. На первом этапе вычисляются промежуточные коэффициенты c_i как решения системы линейных алгебраических уравнений. Эта система была решена аналитически, поэтому каждый из n коэффициентов может быть вычислен независимо по выведенной формуле, что дает n-кратное ускорение решения задачи на данном этапе.

1.2. Вычисление коэффициентов функции Грина. Вычисление коэффициентов a_i и b_i функции Грина из соответствующих систем линейных алгебраических уравнений производится на каждом участке $[t_{i-1}, t_i]$, что порождает $(n-1)$ независимых процессов. Кроме того, использование параллельных методов решения систем линейных алгебраических уравнений дает дополнительное ускорение.

2. Находим функцию Грина основной задачи (1).

Для решения уравнения Фредгольма II-го рода (подробнее в [5]) был выбран высокоточный метод Ньютона – Котеса. Порядок точности алгоритма $O(h^k)$, где h — длина шага разбиения, а k — количество точек внутри отрезка разбиения (традиционно, для вычислений с точностью 8 знаков $k = 8$). Этот алгоритм предполагает k независимых процессов.

3. Вычисление искомой функции $f(t)$.

Искомую функцию $f(t)$ находим из соотношения (2), рассматриваемого как уравнение относительно $f(t)$ при заданной функции $x(t)$. Решение уравнения Фредгольма

I-го рода будем искать как решение вариационной задачи минимизации функционала

$$\|Af - x\|^2 + \alpha\|f\|^2, \tag{5}$$

где A — соответствующий интегральный оператор (2).

Оценка точности полученного решения производится при помощи вычислительного эксперимента (вычислением невязки для близкой к искомому решению функции $\hat{f}(t)$ и последующим решением полученной задачи предлагаемым методом).

Выходные данные: $f(t)$ — искомая функция, δ — точность полученного решения.

Блок, производящий вычисление функции Грина для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, реализован с использованием пакета Mathematica 5.1. Программа, реализующая описанный алгоритм, находится в стадии разработки.

Описанный алгоритм позволяет параллельно производить часть вычислений внутри каждого блока, порождая порядка n параллельных процессов в каждом, что дает ускорение работы программы в n раз. Кроме того, использование параллельных методов решения систем линейных алгебраических уравнений дает дополнительное ускорение работы программы на этапе 1.

Описанный алгоритм реализуется на языке C++ с использованием стандарта MPI-2 (Message Passing Interface) на высокопроизводительном вычислительном кластере "СКИФ Урал" (332 процессора 1328 вычислительных ядер, 12,2 триллиона операций в секунду) суперкомпьютерного центра ЮУрГУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский В. А. *Динамические измерения: основы метрологического обеспечения.* – Л.: Ленингр. отд-ние, 1984. – 224 с.

2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. *Теория линейных некорректных задач.* М.: Наука, 1978. – 206 с.

3. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. *Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы.* – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.

4. Асфандиярова Ю. С., Заляпин В. И. *Функция Грина линейной краевой задачи с нелокальными данными* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2009. – Т. 39 – С. 128-130.

5. Zalyapin V. I., Kharitonova H. V., Ermakov S. V. *Inverse problems of the measurements theory* // Inverse problems, Design and Optimization Symposium, Miami, Florida, U.S.A., 2007. – P. 91-96.

П. С. Бабкин

Сибирский федеральный университет,

deeppaul@yandex.ru

РАЗРАБОТКА ПОДСИСТЕМЫ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ MOODLE

Настоящая работа посвящена разработке модуля персональных заданий для системы электронного обучения Moodle. Сфера электронного обучения быстро развивается в наши дни. Персональный подход очень важен в этой области. Данный модуль позволяет преподавателям иметь более гибкий контроль